

Kurzfassung / Summary

Viele Rechenverfahren zur Bestimmung der Wasserspiegellagen in gegliederten Flußprofilen berücksichtigen den Einfluß der Geschwindigkeitsverteilung auf den Strömungsvorgang, der Einfluß auf die weiteren Ableitungen wie z.B. die Froudezahl oder die kritische Fließtiefe wird dagegen nicht behandelt. Im folgenden Beitrag wird zunächst anhand eines elektrischen Analogmodells das Zusammenspiel zwischen Fließwiderstand und Abflußverteilung erläutert. Anschließend werden zwei Näherungslösungen für die den Fließzustand charakterisierende Froudezahl abgeleitet, wobei insbesondere auf die nur flach überströmten Vorländer eingegangen wird, bei denen die Änderung des Geschwindigkeitsbeiwertes mit der Fließtiefe bei der Ableitung nicht vernachlässigt werden kann.

Many methods of calculating the water level in channels of compound section take into consideration the influence of velocity distribution on flow formation while the influence of velocity distribution on the subsequent derivations such as the Froude-number or the critical depth of flow are often neglected. In the following text first the interrelations between flow resistance and flow distribution are illustrated by an electric analog model. Then approximate formulas are derived for the Froude-number, which is characterising the state of flow, giving special attention to the only shallowly covered parts of wide river profiles. In this case note should be taken of the variation in the velocity coefficient according to depth.

1 Problemstellung

Zur Berechnung der Wasserspiegellagen in Flüssen mit Vorländern werden heute vorzugsweise Näherungsverfahren verwendet, die eine Anpassung zwischen Rechnung und Naturmessung durch „Eichung“ ermöglichen. Die maßgebenden Abflußbeiwerte werden aus gemessenen Wasserständen und den zugehörigen Abflüssen iterativ berechnet oder durch Optimierungsverfahren bestimmt [1,4]. Prinzipiell können dabei die gegliederten Profile durch prismatische Ersatzquerschnitte ersetzt und die dabei vernachlässigten Einflüsse der Geometrie und Hydraulik integral in den Eichfaktoren erfaßt werden. Je mehr derartige Fremdeinflüsse in den Abflußbeiwerten berücksichtigt werden, desto mehr entfernen sich diese Eichfaktoren von Kennwerten mit einer unmittelbaren physikalischen Bedeutung wie sie etwa den k-Werten der Gerinnewandung zukommt. Ein Nachteil bei dieser Vorgehensweise besteht darin, daß Extrapolationen für andere Wasserführungen problematisch werden und hinreichend genaue Schätzungen der maßgebenden Abflußbeiwerte bei Fehlen geeigneter Messungen unmöglich werden.

Diese schwerwiegenden Mängel können nur durch eine möglichst differenzierte Erfassung der tatsächlichen hydraulischen und geometrischen Verhältnisse vermieden werden. Dies gilt z.B. für die gesonderte Beschreibung örtlicher Energieverluste bei plötzlichen Erweiterungen oder die Erfassung von Verengungsverlusten an Engstellen. Von großer Bedeutung ist auch die richtige Berechnung der Abflußverteilung in einem gegliederten Querschnitt, besonders im Hinblick auf die Extrapolation zu sehr großen Abflüssen, wofür meist keine Eichmessungen vorliegen.

Ein Beispiel für eine derartige, detaillierte Erfassung der geometrischen und hydraulischen Gegebenheiten ist die von Felkel und Canisius [1] vorgeschlagene Methode zur Berechnung der Wasserspiegellagen für ausufernde Hochwässer, die in der Praxis bereits eine breite Anwendung gefunden hat [2,3]. Obwohl die in Wirklichkeit räumlichen Strömungsprobleme auch hier nur eindimensional behandelt werden, können die maßgebenden geometrischen und hydromechanischen Verhältnisse bereits sehr differenziert nachempfunden werden. Dies soll im folgenden am Beispiel der Abflußverteilung im gegliederten Querschnitt und der Berechnung des Fließzustandes gezeigt werden.

2 Die Abflußverteilung in einem gegliederten Querschnitt

Die Aufteilung des Gesamtabflusses in einzelne Teilströme kann am besten an einem elektrischen Analogmodell entsprechend *Bild 1* demonstriert werden. Bei gegebener Spannung U (Energiegefälle I_E) ist die Aufteilung des Gesamt-

Stromes I (Abfluß Q) allein von dem Verhältnis Einzelwiderstände R_i bzw. der Leitwerte $1/R_i$ zueinander abhängig. Analog hierzu wird im Falle der Gerinneströmung die Aufteilung des Abflusses in einem gegliederten Querschnitt durch die Fließwiderstände in den Teilquerschnitten bestimmt. Der spezifische Fließwiderstand eines Teilquerschnittes kann durch die spezifische Geschwindigkeit v_i (Fließgeschwindigkeit bei Normalabfluß mit einem Gefälle $I_E = 1$ [1]) ausgedrückt werden. Je nach Ansatz des Fließgesetzes ergeben sich die in *Tafel 1* zusammengestellten Ausdrücke für die den Fließwiderstand im Teilabflußquerschnitt bestimmenden spezifischen Geschwindigkeiten [1,2].

Der Fließwiderstand eines Teilabflußquerschnittes bzw. der hydraulische Leitwert $c_i = v_i A_i$ (conveyance, [5] S. 12.8) wird durch drei Größen bestimmt:

- durch den Rauigkeitsbeiwert K_i bzw. $k_{ST,i}$
- durch den hydraulischen Radius R_i
- durch den Fließquerschnitt A_i

Die beiden Kenngrößen $R_i (=A_i/U_i)$ und A_i sind Funktionen der Fließtiefe, die sich mit wachsender Fließtiefe in den einzelnen Teilabflußquerschnitten unterschiedlich ändern. Aus diesem Grund ist die Abflußverteilung im gegliederten Querschnitt von der Fließtiefe abhängig. Eine Berechnung des Strömungsvorganges durch Ansatz unabhängiger Teilgerinne ist nicht möglich, da die dem jeweiligen Wasserstand zugeordnete Abflußverteilung nicht von vornherein angegeben werden kann. Die Berechnung der Abflussverteilung im natür-

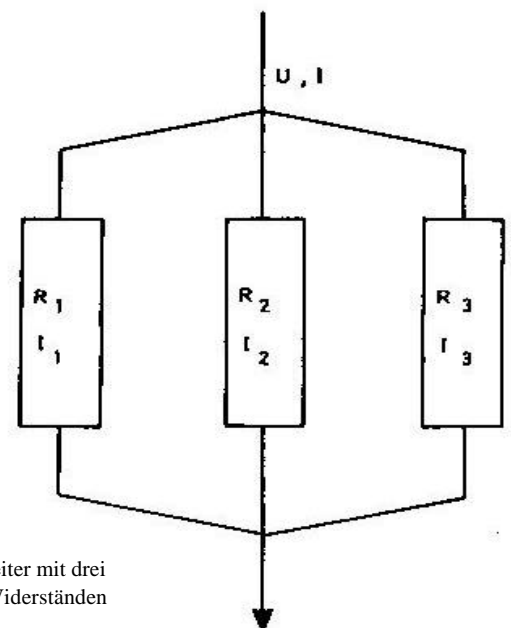


Bild 1 : Elektrischer Leiter mit drei parallel geschalteten Widerständen

Tafel 1: Spezifische Geschwindigkeiten \tilde{v}_i^*

* unter Berücksichtigung von Flußkrümmungen, s. [1, 2]
 ** für den vollkommen rauhen Bereich

Teilabflußquerschnitt	Manning-Strickler	Prandtl-Colebrook **
linkes Vorland	$\tilde{v}_L = k_L R_L^{2/3} \sqrt{I_F/I_L}$	$\tilde{v}_L = 17,72 \lg (14,84 R_L/K_L) \sqrt{R_L(I_F/I_L)}$
Flußbett	$\tilde{v}_F = k_F R_F^{2/3}$	$\tilde{v}_F = 17,72 \lg (14,84 R_F/K_F) \sqrt{R_F}$
rechtes Vorland	$\tilde{v}_R = k_R R_R^{2/3} \sqrt{I_F/I_R}$	$\tilde{v}_R = 17,72 \lg (14,84 R_R/K_R) \sqrt{R_R(I_F/I_R)}$

lichen Gerinne ist nur auf iterativem Wege möglich, wobei in der Regel von einem horizontalen Wasserspiegel ausgegangen wird. Für den Durchfluß Q des Gesamtquerschnitts gilt - im Gegensatz zum linearen Ohmschen Gesetz der Elektrotechnik ein quadratisches Widerstandsgesetz in der Form

$$Q = c I_E^{1/2} \quad (1)$$

wobei sich der hydraulische Leitwert des Gesamtquerschnitts analog zum 1. Kirchhoffschen Gesetz für Stromverzweigungen aus der Summe der Einzelleitwerte ergibt.

$$C = \sum C_i \quad (2)$$

Mit Gl.(2) entsteht aus Gl.(1) die Arbeitsgleichung für den Abfluß in gegliederten Querschnitten (vgl. [1] S. 310 und [5] S. 139):

$$Q = (v_L A_L + v_F A_F + v_R A_R) I_E^{1/2} \quad (3)$$

Die Ableitung der Arbeitsgleichung ist in der o.g. Literatur angegeben. Hier sollte lediglich durch die Analogie zur Elektrotechnik das Zusammenspiel zwischen Fließwiderstand und Abflußverteilung im gegliederten Querschnitt deutlich gemacht werden.

Aber nicht nur die auf dem gesamten Fließweg wirksamen Größen wie k-Wert, Durchflußfläche und hydraulischer Radius beeinflussen die Verteilung des Durchflusses. Auch örtliche, auf einen Teilabflußquerschnitt beschränkte, Fließwiderstände wie z.B. plötzliche Erweiterungen oder Verbauungen in einem Teilquerschnitt haben einen unmittelbaren Einfluß auf die Aufteilung des Gesamtabflusses in die einzelnen Teilströme. Wenn man z.B. die Erweiterungsverluste für jeden Teilabflußquerschnitt getrennt berechnet, so können die an sich skalaren Einzelverlusthöhen nicht einfach aufsummiert werden und als Summe in Ansatz gebracht werden. Vielmehr wird sich in Abhängigkeit von den Zusatzverlusten eine andere Abflußverteilung ergeben, wobei der Gesamtverlust im

Vergleich zur einfachen Aufsummierung der Teilverluste kleiner wird.

Die spezifische Geschwindigkeit eines Teilquerschnitts mit örtlichem Zusatzverlust ändert sich entsprechend.

$$\tilde{v}_i = \frac{\tilde{v}_i}{\left(1 + \frac{\zeta E_i}{\zeta R_i}\right)^{1/2}} \quad (4)$$

wobei ζE_i den zusätzlichen Einzelverlust- und ζR_i den Reibungsverlustbeiwert längs des Fließweges bedeutet.

Von dieser Möglichkeit, die Abflußverteilung in einem gegliederten Querschnitt unter Berücksichtigung von Einzelverlusten zu berechnen, wird in der Praxis bisher kaum Gebrauch gemacht, da derartige Feinheiten der Berechnung im Vergleich zu den naturgegebenen Unsicherheiten der k-Wert-Festlegung relativ unbedeutend sind. Es gibt jedoch Fälle, bei denen es auf die Abflußverteilung und die damit verbundene Energieverteilung in einem Querschnitt besonders ankommt. Dies ist z.B. der Fall, wenn sich der Fließzustand in einem kritischen Bereich befindet. Die Abflußverteilung hat einen Einfluß auf das Bestimmungskriterium des Fließzustandes, wie im folgenden gezeigt wird.

3 Die Froudezahl als Bestimmungskriterium für den Fließzustand

Der Fließzustand ist im Rahmen der Wasserspiegellagenberechnung für die Wahl der Berechnungsrichtung und für die Kennzeichnung von Fließwechseln von Bedeutung. Der Einfluß der Geschwindigkeitsverteilung auf diesen Kennwert soll im folgenden untersucht werden.

3.1 Definition der Froudezahl für einfache Gerinne

Abflußvorgänge in Freispiegelgerinnen können sich im schießenden oder strömenden Bereich vollziehen. Maßgebend für den Grenzzustand der Fließform ist der minimale Wert der sohlspezifischen Energie:

$$h_g = \frac{\alpha v^2}{2g} + h \cos \beta \quad (5)$$

mit α Geschwindigkeitsbeiwert,
 β Neigungswinkel der Sohle.

Bild 2 zeigt den Verlauf dieser Funktion für einfache Gerinnequerschnitte bei einem konstanten Abfluß $Q = \text{konst}$.

Für Fließtiefen unterhalb der Grenztiefe h_{gr} erfolgt der Abfluß im schießenden, oberhalb im strömenden Bereich. Das Minimum der sohlspezifischen Energie ergibt sich aus der Ableitung von Gl.(5):

$$\frac{dh_g}{dh} = \frac{d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)}{dh} + \frac{d(h \cos \beta)}{dh} = 0 \quad (6)$$

h in m

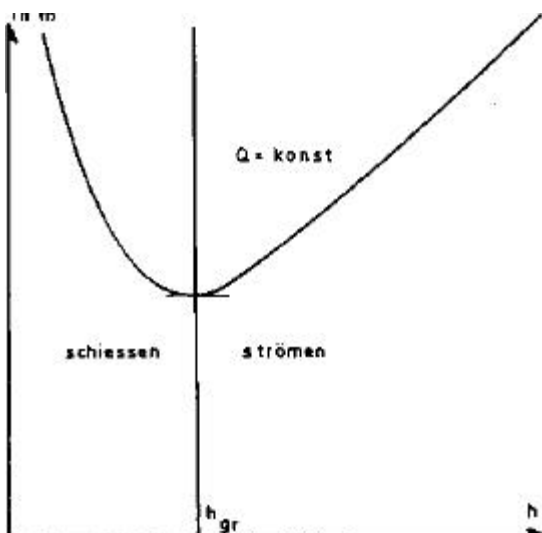


Bild 2: Sohlspezifisches Energiediagramm

Unter Berücksichtigung der Kontinuitätsbedingung besteht für Gerinnequerschnitte mit stetiger Berandung bei konstantem Abfluß nur eine Abhängigkeit der sohlspezifischen Energie von der Fließtiefe h und der durchflossenen Fläche A . Aus Gl.(6) folgt mit $A=bh$

$$\frac{\alpha Q^2 b}{\cos^3 \beta g A^3} = 1 \quad (7)$$

Die linke Seite der Gl. (7) kann als Quadrat der Froudezahl definiert werden, wenn man davon ausgeht, daß der Unterschied zwischen dem Minimum der Energiehöhe und der Grenzlage zwischen Schießen und Strömen vernachlässigbar gering ist (vgl. hierzu [6] und [7]). Der Fließzustand in einem einfachen Gerinne lässt sich mit

$$Fr^2 = \frac{\alpha Q^2 b}{\cos^3 \beta g A^3} \quad (8)$$

- $Fr > 1$ schießender Abfluß
- $Fr = 1$ kritischer Abfluß
- $Fr < 1$ strömender Abfluß.

Die Grenzlinie zwischen Schießen und Strömen wird in der Natur nicht auf ein Querprofil begrenzt sein. Diese Vereinfachung wird hier nur aus rechentechnischen Gründen zur leichteren Handhabung bei der Spiegellinienberechnung eingeführt.

3.2 Allgemeine Ableitung der Froudezahl

Bei der Ableitung in Abschnitt 3.1 ist die Abhängigkeit des Geschwindigkeitsbeiwertes α von h vernachlässigt worden. Diese Vereinfachung ist insbesondere bei gegliederten Querschnitten nicht immer zulässig. Wenn sich die Geschwindigkeitsverteilung mit der Fließtiefe sehr stark ändert, so ist dies bei der Differentiation zu berücksichtigen. Für n -fach gegliederte Querschnitte gilt folgende Näherungsformel für den Geschwindigkeitsbeiwert [1,5,8]:

$$\alpha \approx A^2 \frac{\sum_{i=1}^n v_i^3 A_i}{(\sum_{i=1}^n v_i A_i)^3} \quad (9)$$

Mit den Abkürzungen $Z = \sum v_i^3 A_i$ und $N = \sum v_i A_i$ entsteht aus Gl.(6) und Gl.(9) folgender Ausdruck für das Minimum der sohlspezifischen Energie

$$\frac{dh_E}{dh} = \frac{Q^2}{2g} \frac{d(Z/N^3)}{dh} + \cos \beta = 0 \quad (10)$$

Die Differentiation mit Hilfe der Quotientenregel liefert folgende verallgemeinerte Form der Froudezahl:

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{2g} \frac{3ZN' - NZ'}{N^4} \quad (11)$$

Je nach Wahl des Widerstandsgesetzes ergeben sich unterschiedliche Ausdrücke für die Ableitungen Z' bzw. N' . Für den Fall eines dreifach gegliederten Gerinnequerschnitts sind die verschiedenen Ausdrücke in *Tafel 2* zusammengestellt. Die Ableitungen gelten für Vorländer großer Breite, bei denen die Änderung des benetzten Umfanges und der Spiegelbreite mit der Fließtiefe vernachlässigt werden kann.

3.3 Vergleich der Froude-Definitionen mit dem Verlauf der sohlspezifischen Energie

Für ein gewähltes Gerinneprofil mit breiten Vorländern wurde die sohlspezifische Energie für verschiedene Fließtiefen h bei konstantem Abfluß Q berechnet. Der Verlauf der Energiehöhe für den Abfluß $Q = 180 \text{ m}^3/\text{s}$ ist in *Bild 3* dargestellt (Kurve 1). Darüber ist die Kurve der Froudezahlen nach Gl.(8) als Kurve 2 und nach Gl.(11) als Kurve 3 aufgetragen.

Für den Fall, daß der Abfluß auf das Flußbett beschränkt ist, stimmen die Froudezahlen nach beiden Definitionen überein. Bei der Fließtiefe $h = 2,02 \text{ m}$ liegt das Energieminimum, d.h. bei Unterschreiten dieser Fließtiefe tritt ein Fließwechsel ein. Bei Überflutung der Vorländer deutet die in Abschnitt 3.1 hergeleitete Definition der Froudezahl schießenden Abfluß (Kurve 2) bis zu einer Grenztiefe von $h = 3,27 \text{ m}$ an. Diese Aussage steht jedoch im Widerspruch zum Verlauf der sohlspezifischen Energie (Kurve 1), die nach Überflutung der Vorländer einen stetigen Anstieg aufweist, also bei $h = 3,27 \text{ m}$ keinen Extremwert hat. Der Abfluß bleibt bei Überflutung der Vorländer im strömenden Bereich. Diese Aussage liefert auch die in Abschnitt 3.2 hergeleitete verallgemeinerte Froude-Definition (Kurve 3).

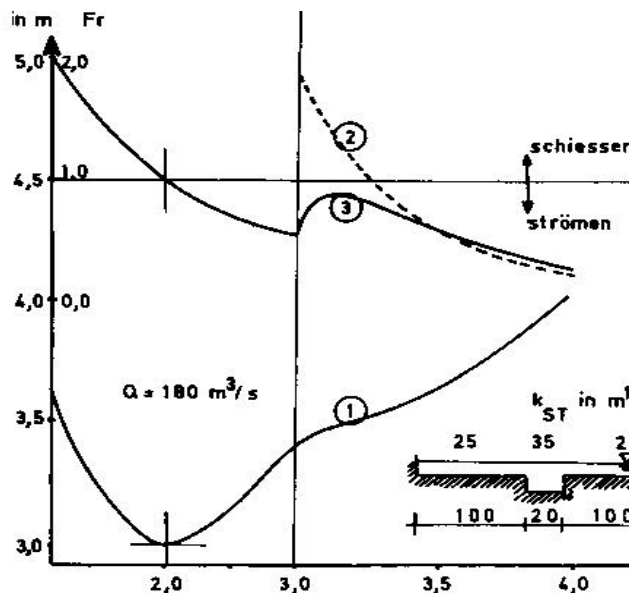


Bild 3: Sohlspezifische Energiehöhe und Froude-Zahl als Funktionen der Fließtiefe bei $Q = 180 \text{ m}^3/\text{s}$

Tafel 2: Funktionen zur Berechnung der Froudezahl für dreifach gegliederte Querschnitte

Abkürzungen	Manning-Strickler	Prandtl-Colebrook
Z	$\tilde{v}_L^3 A_L + \tilde{v}_F^3 A_F + \tilde{v}_R^3 A_R$	$17,72^3 \sum_{i=1}^3 A_i \left[\lg(14,84 R_i/K_i) \sqrt{R_i (l_F/l_i)} \right]^3$
Z'	$3(\tilde{v}_L^3 b_L + \tilde{v}_F^3 b_F + \tilde{v}_R^3 b_R)$	$24,05^3 \sum_{i=1}^3 b_i \left[\lg(14,84 R_i/K_i) \right]^2 \sqrt{R_i (l_F/l_i)}^3 \lg(49,25 R_i/K_i)$
N	$\tilde{v}_L A_L + \tilde{v}_F A_F + \tilde{v}_R A_R$	$17,72 \sum_{i=1}^3 A_i \lg(14,84 R_i/K_i) \sqrt{R_i (l_F/l_i)}$
N'	$\frac{5}{3}(\tilde{v}_L b_L + \tilde{v}_F b_F + \tilde{v}_R b_R)$	$26,58 \sum_{i=1}^3 b_i \lg(28,94 R_i/K_i) \sqrt{R_i (l_F/l_i)}$

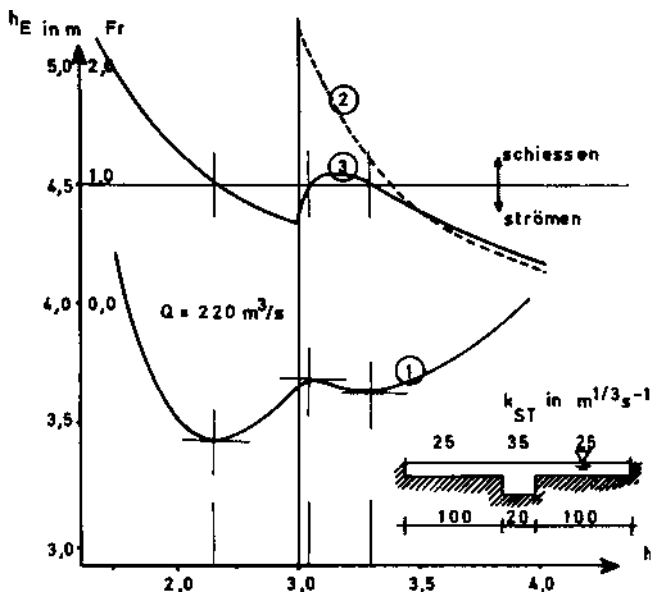


Bild 4: Sohl-spezifische Energiehöhe und Froude-Zahl als Funktionen der Fließtiefe bei $Q = 220 \text{ m}^3/\text{s}$

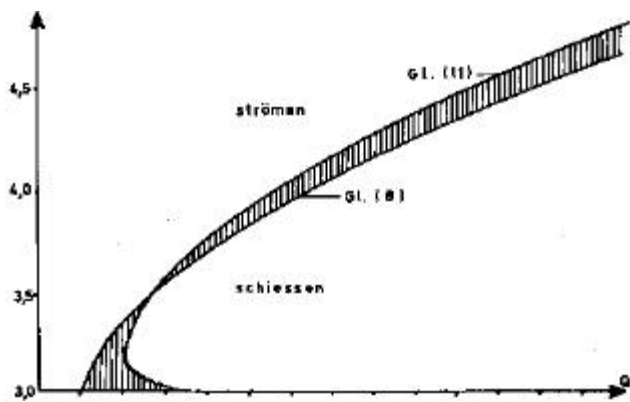


Bild 5: Grenzkurven des Fließzustandes für die beiden hergeleiteten Froude-Definitionen

In Bild 4 sind für einen Abfluß von $Q = 220 \text{ m}^3/\text{s}$ die entsprechenden Kurven von Bild 3 aufgetragen. Die sohl-spezifische Energiekurve weist drei Extremwerte ($h_1 = 2,32$, $h_2 = 3,05$ und $h_3 = 3,27 \text{ m}$) auf. Die geforderte Bedingung $Fr = 1$ wird für diese Stellen von Gl.(11) erfüllt, nicht dagegen von Gl.(8).

3.4 Arbeitsbereich der Froude-Definitionen

Die unterschiedliche Aussage der in den Abschnitten 3.1 und 3.2 gegebenen Froude-Definitionen hinsichtlich des

Fließzustandes soll für das in Abschnitt 3.3 gezeigte Gerinneprofil näher untersucht werden. Bei kritischem Abfluß ergibt sich mit der Bedingung $Fr = 1$ aus Gl.(8):

$$Q^2 = \frac{\cos \beta \cdot A_{gr}^3}{b \cdot \alpha_{gr}} \quad (12)$$

und aus der Gl.(10):

$$Q^2 = 2g \cos \beta \frac{N^4}{32N^2 - N^2} \quad (13)$$

Diese Funktionen sind in Bild 5 dargestellt. Die Kurven geben die Grenzlage zwischen schießendem und strömendem Fließzustand an. Oberhalb der Kurven vollzieht sich der Abfluß strömend, unterhalb schießend. Zwischen den beiden Kurven befindet sich der Bereich, in dem unterschiedliche Aussagen über das Fließverhalten gemacht werden. Die angegebenen Kurven gelten nur für das hier als Beispiel gewählte Gerinneprofil mit 100 m breiten Vorländern und den in Bild 4 angegebenen k -Werten. Eine allgemeingültige Darstellung des Grenzbereiches in Abhängigkeit von den gerinne-spezifischen Parametern ist nicht möglich, da die Abflußverteilung nur für ein konkretes Beispiel berechnet werden kann. Der Einsatz der wesentlich einfacheren Froude-Definition nach Gl.(8) zur Bestimmung des Fließzustandes in Gerinnen mit breiten Vorländern kann in den Fällen zu Fehlschlüssen führen, bei denen sich die Abflaufaufteilung mit der Fließtiefe deutlich ändert. Hier sollte auf die etwas umfangreichere Gl.(11) zurückgegriffen werden.

Schrifttum

- [1] Felkel, K., P. Canisius: Rechenautomatenprogramm zur Spiegelberechnung für ausufernde Hochwässer. Die Wasserwirtschaft Heft 5, 1961
- [2] Landesamt für Wasserwirtschaft; Wasserspiegelberechnung für stationär ungleichförmigen Abfluß. (STAWABE), EDV-Anwendungshandbuch B 5054 101, München, Dez. 1974
- [3] Merzdorf, F.H.: Erfassung und Begrenzung der Überschwemmungsgebiete im Land Nordrhein-Westfalen. Wasser und Boden, H. 9, 1976
- [4] Seus, G.J., O. Uslu: Berechnung der Wasserspiegellagen bei stationär-ungleichförmigem Abfluß in natürlichen Gerinnen und die Optimierung der Ermittlung der Fließbeiwerte. Lehrgangssymposium „Elektronische Berechnung von Rohr- und Gerinne-Strömungen“, Nürnberg, Okt. 1972
- [5] Chow, Ven te: Open-Channel Hydraulics, MC Graw-Hill, 1959
- [6] Lauffer, H.: Wasserspiegellage und Fließzustand bei Berücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilung. Der Bauingenieur Heft 33/34, 1935, S. 353-386
- [7] Schröder, R.C.M.; Bemerkungen zur Gerinneberechnung mit den verallgemeinerten Grundgleichungen der Technischen Hydraulik. Der Bauingenieur Heft 6, 1963, S. 218-220
- [8] Naudascher, E.: Berechnung der Wasserspiegellage in gegliederten Kanalquerschnitten. Der Bauingenieur Heft 1, 1956,

Anschriften der Verfasser: Dr.-Ing. Dieter Knauf, Agrar- und Hydrotechnik GmbH, Huyssenallee 66/68, 4300 Essen, und Dipl.-Ing. Norbert Könemann, Institut für Hydraulik und Hydrologie, Petersenstraße, 6100 Darmstadt